

2025 年全国高考名校名师联席命制

数学信息卷(六)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	D	B	D	C	A	D	A	A	BD	BCD	BCD	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$	$\{3,4,5\}$ 22

1. D 【热考点】根据集合的交集求参数范围

【深度解析】因为 $B = \{x | x^2 - 5x < 0\}$, 所以 $B = \{x | 0 < x < 5\}$, 因为 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$ (提示: 根据题设判断集合 A, B 的关系是解题的关键), 故 $a \geq 5$. 故选 D.

快解 排除法. 取 $a=5$, 则 $A = \{x | x \leq 5\}$, 显然 B 是 A 的子集, 排除 A, C. 取 $a=4$, 则 $A = \{x | x \leq 4\}$, 显然 B 不是 A 的子集, 排除 B. 故选 D.

2. B 【热考点】复数的四则运算、模

【深度解析】由题意 $z_1 - z_2 = \frac{2}{1+i} - 2i = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} - 2i = 1 - 3i$, 所以 $|z_1 - z_2| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. 故选 B.

一题多解 由 $z_1 = 1-i$, 得复数 z_1 在复平面内对应的点的坐标为 $A(1, -1)$, 复数 z_2 在复平面内对应的点的坐标为 $B(0, 2)$, 所求 $|z_1 - z_2|$, 即为 $|AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$ (提示: $|z_1 - z_2|$ 的几何意义是复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点的距离). 故选 B.

快解 由 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, 得 $|z_1 - z_2| = \left| \frac{2}{1+i} - 2i \right| = \left| \frac{4-2i}{1+i} \right| = \frac{|4-2i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$. 故选 B.

3. D 【热考点】抛物线的准线方程

【深度解析】因为抛物线 $C: y = -\frac{x^2}{2p}$ 经过点 $(2, -1)$, 所以 $4 = -2p \times (-1) = 2p$, 解得 $p=2$, 则 $\frac{p}{2} = 1$, 所以抛物线 C 的准线方程为 $y=1$. 故选 D.

4. C 【热考点】分层随机抽样、组合数

【深度解析】因为是按比例分配的分层随机抽样的方法, 从 15 个相同的红球和 10 个相同的黑球中抽出 10 个球, 所以红球有 $15 \times \frac{10}{25} = 6$ 个, 黑球有 $10 \times \frac{10}{25} = 4$ 个, 由于红球是完全相同的, 黑球也是完全相同的, 则有 1 种抽取方法, 进而将 4 个黑球安排在 10 个位置中的 4 个, 有 C_{10}^4 种方法, 剩余 6 个位置安排红球, 有 1 种方法, 由分步乘法计数原理, 可得共有 C_{10}^4 种不同的排列方法. 故选 C.

易错警示 此题极易因为没有注意到“相同”二字而误选 B.

5. A 【热题型】三角恒等变换

【深度解析】因为 $\sin x + \cos x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. 又 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 所以

$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$, 故 $\tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \pi\right] = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$. 故选 A.

一题多解 由 $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = \frac{9}{5}$, 解得 $2\sin x \cos x = \frac{4}{5}$, 所以 $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{5}$. 又因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $\sin x - \cos x \leq 0$, 所以 $\sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 解得 $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故 $\tan x = \frac{1}{2}$, 从而 $\tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \pi\right] = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 3$. 故选 A.

关键点拨 $\sin x + \cos x, \sin x - \cos x, \sin x \cos x$ 这三者可以“知一求二”, 在开方运算时, 要注意符号.

6. D 【热题型】指数型复合函数的单调性、新定义、函数不等式恒成立问题

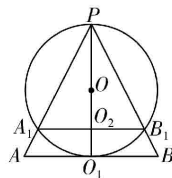
【深度解析】因为函数 $y = e^{x-1}, y = x-2$ 都是 \mathbf{R} 上的增函数, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数, 所以当 $x \leq 1$ 时, $f(x) \leq f(1) = 0$, 所以当 $x \leq 1$ 时, $M(x) \leq 0$ 成立. 因为当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1) = 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $g(x) \leq 0$ 恒成立, 即当 $x > 1$ 时, $a(x-1) \leq x^2 + x$, 即 $a \leq \frac{x^2 + x}{x-1}$. 设 $t = x-1 > 0$, 则 $\frac{x^2 + x}{x-1} = \frac{t^2 + 3t + 2}{t} = t + \frac{2}{t} + 3 \geq 3 + 2\sqrt{t \cdot \frac{2}{t}} = 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $t = \frac{2}{t}$, 即 $t = \sqrt{2}$ 时取等号, 所以 $a \leq 3 + 2\sqrt{2}$. 故选 D.

考法解读 双重最值问题一般设计为函数与不等式交汇, 在 2024 年九省(区)联考试卷中, 第 14 题设置题目为对双重最值问题的考查, 本题与该题有异曲同工之妙, 求最小值中的最大值, 解题时注意分情况讨论.

7. A 【热风向】新定义问题

【深度解析】根据题意, 以圆锥的高为直径的球的半径为 1, 且与圆锥底面相切于底面圆心, 如图, 作出圆锥 PO_1 的轴截面 PAB , 所求体积即为球缺 $P-A_1O_2B_1$ 与内接圆锥 PO_2 的体积之差. 设轴截面顶角为 α ,

则 $\sin \alpha = \sin(\pi - 2\angle PAB) = \sin 2\angle PAB = 2\sin \angle PAB \cos \angle PAB = 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$, 设圆锥 PO_2 的底面半径为 r , 则 $2 = \frac{2r}{\sin \alpha}$ (提示: 圆锥 PO_2 的底面直径为 A_1B_1 , $\triangle PA_1B_1$ 的外接圆直径为



2), 即 $r = \frac{4}{5}$, 得 $OO_2 = \frac{3}{5}$, 则圆锥 PO_2 的高为 $\frac{8}{5}$, 则 $V_{\text{圆锥}PO_2} = \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{8}{5} = \frac{128\pi}{375}$, 球缺的高为 $\frac{8}{5}$, 则 $V_{\text{球缺}} = \pi \left(\frac{8}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{8}{15}\right) = \frac{448\pi}{375}$, 则所求体积 $V = V_{\text{球缺}} - V_{\text{圆锥}PO_2} = \frac{64\pi}{75}$. 故选 A.

关键点拨 本题的解题关键是能识别出所求的几何体的体积为球缺与内接圆锥的体积差, 求球缺体积时能够根据题干给出的新公式, 准确地识别出公式的各部分意义并加以应用.

8. A 【热考点】利用导数研究函数的单调性和最值

【深度解析】 \because 正实数 x, y 满足 $e^x = y \ln x + y \ln y$, $\therefore x e^x = x y \ln(xy) = e^{\ln(xy)} \cdot \ln(xy) > 0$ (提示: 利用同构思想, 构造函数), 构造函数 $f(x) = x e^x$, 则 $f(x) = f(\ln(xy))$, $f'(x) = (x+1)e^x$, \therefore 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x) = f(\ln(xy)) \Leftrightarrow x = \ln(xy) > 0$, $\therefore \ln y = x - \ln x$, 则 $\frac{\ln x + 1}{x} -$

$\ln y = \frac{\ln x + 1}{x} - x + \ln x$ (提示: 整体代入思想).

令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x} - x + \ln x, x \in (0, +\infty)$ (提示: 构造函数, 利用

导数研究函数的单调性及最值), $g'(x) = \frac{x - x^2 - \ln x}{x^2}$, 易知

$g'(1) = 0$. 令 $h(x) = x - x^2 - \ln x, x \in (0, +\infty)$,

$h'(x) = 1 - 2x - \frac{1}{x} = \frac{x - 2x^2 - 1}{x} = -\frac{2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}}{x} < 0$,

\therefore 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $g'(1) = 0$,

\therefore 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore x = 1$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极大值, 即为最大值, 为 0. 故选 A.

9. BD 【热考点】样本的数字特征、对立事件

【深度解析】 对于 A, 甲机构测评分数的平均分 $\bar{x}_甲 = \frac{90+98+90+92+95}{5} = 93$, 乙机构测评分数的平均分 $\bar{x}_乙 = \frac{93+95+92+91+94}{5} = 93$, 故 A 错误;

对于 B, 甲机构测评分数的方差 $s_1^2 = \frac{1}{5} [(90-93)^2 + (98-93)^2 + (90-93)^2 + (92-93)^2 + (95-93)^2] = 9.6$,

乙机构测评分数的方差 $s_2^2 = \frac{1}{5} [(93-93)^2 + (95-93)^2 + (92-93)^2 + (91-93)^2 + (94-93)^2] = 2$, 故 B 正确;

对于 C, 乙机构测评分数从小到大排列为 91, 92, 93, 94, 95 (易错: 判断一组数据的中位数或百分位数时, 应该将数据进行从小到大排列), 又 $i = np = 5 \times 0.25 = 1.25$, 所以乙机构测评分数的第一四分位数为 92, 故 C 错误;

对于 D, 因为甲机构测评分数中有且仅有 2 个测评分数超过平均分, 由对立事件的定义知, 事件 M, N 互为对立事件, 故 D 正确. 故选 BD.

快解 对于 A, 将甲、乙两组数据都减去 90 后得到两组新的数据: 甲: 0, 8, 0, 2, 5; 乙: 3, 5, 2, 1, 4,

分别计算新的数据的平均数再加上 90, $\bar{x}_甲 = \frac{0+8+0+2+5}{5} +$

$90 = 93, \bar{x}_乙 = \frac{3+5+2+1+4}{5} + 90 = 93$, 故 A 错误;

对于 B, 由新数据甲: 0, 8, 0, 2, 5; 乙: 3, 5, 2, 1, 4, 显然可以看出, 甲组数据波动更大, 故甲的方差更大 (提示: 方差表示数据的集中程度, 方差越小, 数据越集中; 方差越大, 数据越分散), 故 B 正确.

10. BCD 【热考点】三次函数的图象的切线、零点问题

【深度解析】 对于 A, 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^3 + 1$, 则 $f'(x) = 3x^2$, 若 $f'(x) = 0$, 则 $x = 0$, 则 $f(0) = 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = 1$, 故 A 错误.

对于 B, 当 $a = 3$ 时, $f(x) = x^3 - 3x + 1$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 3$, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 又因为 $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, 结合三次函数的图象特征, 此时 $f(x)$ 有三个零点, 故 B 正确.

对于 C, 因为 $f(x)$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 所以 $x^3 - ax + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (提示: 函数存在三个零点, 则可以将函数解析式因式分解), 展开后对比含 x^2 项的系数, 可得 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 故 C 正确.

对于 D, 当 $a \leq 0$ 时, 易知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 结合图象知不符合题意, 故 $a > 0$. 因为 $f(x) + f(-x) = 2$, 所以函数 $f(x) = x^3 - ax + 1$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 成中心对称图形. 则此正方形必以点 $(0, 1)$ 为中心, 不妨设正方形的四个顶点分别为 A, B, C, D, 其中一条对角线 AC 的方程为 $y = kx + 1 (k > 0)$, 则 $x^3 - ax + 1 = kx + 1$, 即 $x^3 - (a+k)x = 0$, 解得 $x = \pm \sqrt{a+k}$, 则

$|AC| = 2\sqrt{1+k^2}\sqrt{a+k}$, 同理可得 $|BD| = 2\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{a-\frac{1}{k}}$.

由 $|AC|^2 = |BD|^2$ 得 $(k^2-1)a + k^3 + \frac{1}{k} = 0$, 根据题意, 方程

$(k^2-1)a + k^3 + \frac{1}{k} = 0$ 只有一个正解, 当 $k = 1$ 时, 显然不成

立. 故 $k \neq 1$, 则 $-a = \frac{k^3 + \frac{1}{k}}{k^2 - 1} = \frac{k^2 + \frac{1}{k^2}}{k - \frac{1}{k}} = k - \frac{1}{k} + \frac{2}{k - \frac{1}{k}}$,

因为 $a > 0$, 所以 $k \in (0, 1)$, 设 $t = k - \frac{1}{k}$, 则 $t \in (-\infty, 0)$.

设 $g(t) = t + \frac{2}{t}$, 根据题意, 只需要直线 $y = -a$ 与函数 $g(t) = t + \frac{2}{t}$ 的图象只有唯一的公共点即可.

结合对勾函数的图象可得 $-a = -2\sqrt{2}$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

方法速记 三次函数图象的对称中心还可以用 $f''(x) = 0$ ($f'(x)$ 的导数为 $f''(x)$) 进行求解. 如: $f(x) = x^3 - ax + 1$, $f'(x) = 3x^2 - a$, $f''(x) = 6x = 0$, 解得 $x = 0$, 故函数 $f(x) = x^3 - ax + 1$ 图象的对称中心为 $(0, 1)$.

11. BCD 【热风向】函数奇偶性的定义与判断, 函数奇偶性、周期性、对称性的应用

【深度解析】 对于 A, 由题可得, 令 $y = 0$, 则 $2f(x) = 2f(x)f(0)$, 又 $f(x)$ 不恒为 0, 所以 $f(0) = 1$, 故 A 错误;

对于 B, 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 由 A 选项可知, $f(0) = 1$, 令 $x = 0$, 有 $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$, 得 $f(-y) = f(y)$, 则函数 $f(x)$ 为偶函数, 故 B 正确;

对于 C, 若 $f(1) = 0$, 令 $x = 1$, 有 $f(1+y) + f(1-y) = 2f(1)f(y) = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称, 故 C 正确;

对于 D, 由 C 选项可知, $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称, 又 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(1+x) = -f(1-x) = -f(x-1)$, 即 $f(x+2) = -f(x)$, 因此 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 显然 $f(1) + f(3) = 0, f(2) +$

$f(4) = 0$, 即 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$, 所以 $\sum_{i=1}^{2024} f(i) = 506 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = 0$, 故 D 正确. 故选 BCD.

一题多解 对应函数法. 因为 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 根据和差化积公式, 不妨令 $f(x) = \cos \omega x$.

对于 A, $f(0) = \cos 0 = 1$, 故 A 错误;

对于 B, $f(-x) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为偶函数, 故 B 正确;

对于 C, 若 $f(1) = 0$, 结合函数周期性不妨令 $\omega = \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称, 故 C 正确;

对于 D, 若 $f(1) = 0$, 结合函数周期性不妨令 $\omega = \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$, 则 $T = 4$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 显然 $f(1) + f(3) = 0, f(2) + f(4) = 0$, 即 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$,

所以 $\sum_{i=1}^{2024} f(i) = 506 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = 0$, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【热点】椭圆的定义及其几何性质

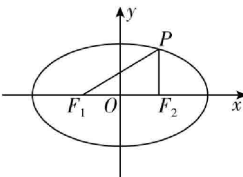
【深度解析】 在 $\text{Rt} \triangle PF_2F_1$ 中, $\angle PF_1F_2 = 30^\circ, |F_1F_2| = 2c$, 由

$$\tan \angle PF_1F_2 = \frac{|PF_2|}{|F_1F_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 得}$$

$$|PF_2| = \frac{2\sqrt{3}}{3}c, \text{ 所以 } |PF_1| = \frac{4\sqrt{3}}{3}c.$$

由椭圆定义 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 得 $\frac{4\sqrt{3}}{3}c + \frac{2\sqrt{3}}{3}c = 2a$, 即 $\sqrt{3}c =$

a , 所以椭圆 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



一题多解

将 $x=c$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $|PF_2| =$

$\frac{b^2}{a}$, 因为 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 所以 $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{|PF_2|}{|F_1F_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即

$\frac{b^2}{\frac{a}{2c}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\sqrt{3}b^2 = 2ac$, 即 $\sqrt{3}(a^2 - c^2) = 2ac$, 所以 $\sqrt{3}c^2 + 2ac -$

$\sqrt{3}a^2 = 0$, 即 $\sqrt{3}e^2 + 2e - \sqrt{3} = 0$, 解得 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (负值舍去). 所以

椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. $\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$ 【热点】圆的标准方程、向量线性运算、重要不

等式

【深度解析】 设 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{PA} = (-2-x, -y), \overrightarrow{PB} = \left(-\frac{1}{2}-x, -y\right)$, 由 $|PA| = 2|PB|$, 得 $\sqrt{(-2-x)^2 + (-y)^2} =$

$$2\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-x\right)^2 + (-y)^2}, \text{ 整理得 } x^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AP} = (x+2, y), \overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{2}, 0\right), \overrightarrow{AC} = (2, 1),$$

$$\text{代入 } \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = \frac{3}{2}\lambda + 2\mu, \\ y = \mu, \end{cases}$$

$$\text{则 } x+y+2 = \frac{3}{2}\lambda + 3\mu = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu), \text{ 所以 } \lambda + 2\mu = \frac{2}{3}(x+y+2),$$

由 $1 = x^2 + y^2 \geq 2xy$, 得 $xy \leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x=y$ 时等号成立 (提示: 重要不等式, 注意检验取等条件),

$$\text{所以 } (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 1 + 1 = 2, \text{ 得 } x+y \leq \sqrt{2},$$

$$\text{所以 } \lambda + 2\mu = \frac{2}{3}(x+y+2) \leq \frac{2}{3}(\sqrt{2}+2) = \frac{2\sqrt{2}+4}{3}.$$

即 $\lambda + 2\mu$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$.

一题多解 由 $1 = x^2 + y^2$, 设 $x = \cos \theta, y = \sin \theta (0 \leq \theta < 2\pi)$, 则 $x+y = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$, 以下同深度解析.

方法速记 平面上一个动点 P , 到两个定点 A, B 的距离之比是一个常数 $a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 即 $\frac{|PA|}{|PB|} = a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 则点 P 的轨迹为圆 (俗称“阿波罗尼斯圆”).

14. {3, 4, 5} 22 【热风向】新定义问题、等差数列求和

思路导引 由特殊 $T_{3,2} = \{3, 4, 5\}$ —— 到一般 $T_{m,3} = \{6, 7, 8, \dots, 3m-3\}$ —— 再到等差数列求和公式 —— 估算 m 的值

【深度解析】 当 $m=3, k=2$ 时, A_2 表示有 2 个元素的集合, $N_3^* = \{1, 2, 3\}$,

因为 $A_2 \subseteq N_3^*$, 且 A_2 有 2 个元素,

所以 $A_2 = \{1, 2\}$ 或 $\{1, 3\}$ 或 $\{2, 3\}$, 所以 $T_{3,2} = \{3, 4, 5\}$.

由题中定义可知 $T_{m,3} = \{6, 7, 8, \dots, 3m-3\}$,

$$\text{于是由 } S(T_{m,3}) \leq 2024 \Rightarrow \frac{(6+3m-3)(3m-3-5)}{2} \leq 2024 \Rightarrow$$

$$9m^2 - 15m - 4072 \leq 0 \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{16313}}{6} \leq m \leq \frac{5 + \sqrt{16313}}{6},$$

而 $\sqrt{16129} < \sqrt{16313} < \sqrt{16384} \Rightarrow 127 < \sqrt{16313} < 128$,

则 $\frac{5 + \sqrt{16313}}{6} \approx 22.1$. 又因为 $m \in \mathbb{N}^*$, 所以 m 的最大值为 22.

关键点拨 新定义的题目多数都会用到“特殊与一般”的思想, 我们要先从具体的元素个数少的情況入手, 发现规律, 这样才能有利于对一般情况的解答.

考法解读 本题为集合与数列的融合考查, 解题时需要关注集合中元素特点, 转化为与等差数列的和相关的恒成立问题. 共设计 2 空, 可以从第 1 空得到的特殊情况, 演绎推导得到后续解题结果.

解答题超详解及评分标准

15. (1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【热点】正弦定理解三角形、三角恒等变换

(1) 【证明】第一步: 由正弦定理把边化为角, 得到 $\sin A = \sin 2B$

根据正弦定理, $\frac{a}{b} = 2\cos B \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} = 2\cos B \Rightarrow \sin A = 2\sin B \cos B = \sin 2B, \dots\dots\dots 2$ 分

第二步: 由 $\sin A = \sin 2B$ 得 $A = 2B$ 或 $A + 2B = \pi$

所以 $A = 2B$ 或 $A + 2B = \pi$ (易错: 当解三角形的题目中出现了正弦值相等, 则对应的两角可能相等, 也可能和为 π). $\dots\dots\dots 4$ 分

第三步: 由 $a < b$ 得 $A < B$, 结合 $A + B + C = \pi$ 得证

又因为 $a < b$, 所以 $A < B$ (提示: 在三角形中, 满足大边对大角),

故 $A = 2B$ 不成立, 所以 $A + 2B = \pi$, 又 $A + B + C = \pi$, 所以 $B = C$.

即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形. $\dots\dots\dots 6$ 分

(2) 【解】第一步: 由 $A = 2B$ 及已知条件求角和边的关系

由 (1) 及 $b \neq c$ 可得, $A = 2B$, 所以 $\angle BAD = \angle DAC = \angle B, C = \pi - A - B = \pi - 3B$.

在 $\triangle ABD$ 中, $BD = AD$. $\dots\dots\dots 8$ 分

第二步: 由正弦定理求得 $\frac{\sin 3B}{\sin B}$

在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin C} = \frac{DC}{\sin \angle DAC} \Rightarrow \frac{BD}{\sin(\pi - 3B)} = \frac{DC}{\sin B}$, 所以 $\frac{\sin 3B}{\sin B} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$.

$\dots\dots\dots 10$ 分

第二步: 求 $\cos B$

而 $\sin 3B = \sin B \cos 2B + \cos B \sin 2B = \sin B (\cos 2B + 2 \cos^2 B) = \sin B (4 \cos^2 B - 1)$,

所以 $4 \cos^2 B - 1 = \frac{1}{3}$, 解得 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (负舍). $\dots\dots\dots 13$ 分

【一题多解】(2) 【解】第一步: 由 $BD : DC = 1 : 3$ 得边长关系

因为 $BD : DC = 1 : 3$, 所以 $BD = \frac{a}{4}, CD = \frac{3a}{4}$.

由角平分线定理得 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, 得 $\frac{c}{b} = \frac{1}{3}$, 即 $b = 3c$. $\dots\dots\dots 8$ 分

第二步: 由 $A = 2B$ 得 $AD = BD$

由 (1) 知, $A = 2B$, 又 AD 平分 $\angle BAC$, 所以 $\angle BAD = \angle DAC = \angle B$, 所以 $AD = BD = \frac{a}{4}$. $\dots\dots\dots 9$ 分

第三步: 余弦定理的推论得 a, c 关系

因为 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$, 所以 $\cos \angle ADB + \cos \angle ADC = 0$,

即 $\frac{BD^2 + AD^2 - AB^2}{2BD \cdot AD} + \frac{CD^2 + AD^2 - AC^2}{2CD \cdot AD} = 0$,

即 $\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - c^2}{2 \times \frac{a}{4} \times \frac{a}{4}} + \frac{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - b^2}{2 \times \frac{3a}{4} \times \frac{a}{4}} = 0$,

整理得 $a^2 - b^2 - 3c^2 = 0$, 将 $b = 3c$ 代入, 得 $a^2 = 12c^2$, 即 $a = 2\sqrt{3}c$, $\dots\dots\dots 11$ 分

第四步: 求 $\cos B$

所以 $\cos B = \frac{a}{2b} = \frac{2\sqrt{3}c}{6c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\dots\dots\dots 13$ 分

16. (1) $y = 0$ (2) 见解析

【热点】导数的几何意义、利用导数证明不等式

(1) 【解】第一步: 求导

由已知得 $f(0) = 0, f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1$, 则 $f'(0) = 0$,

▶ 第 (1) 问 6 分: 分成正弦定理 (2 分) $A + 2B = \pi$ (2 分) 等腰三角形 (2 分) 三个部分给分

▶ A 和 B 的两种等量关系, 一个 1 分, 全部正确给 2 分

▶ 得到 $B = C$, 给 1 分

▶ 扣题证明结论, 给 1 分

▶ 第 (2) 问 7 分, 分成边和角的关系 (2 分) 正弦定理 (2 分) $\cos B$ (3 分) 三个部分给分

▶ 正确表示 $\frac{\sin 3B}{\sin B} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$, 给 1 分

▶ 注: (1) 正确运用角的公式转化, 给 2 分, 写错不给分; (2) $\cos B$ 写对给 1 分; (3) 不深究过程, 只看结论

▶ 角平分线定理, 给 1 分; b 和 c 关系, 给 1 分

▶ 正确得到 $BD = AD$, 给 1 分

▶ 余弦定理的推论, 给 1 分

▶ a 和 c 关系, 给 1 分

注: (1) 有必要过程, 且结果正确, 即给 2 分; (2) 计算过程不深究, 错误不扣分

▶ $\cos B$ 写对给 2 分

▶ 求导正确, 给 1 分; $f(0)$ 正确给 1 分

第二步:得出切线方程

∴ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$ 5 分

(2)【证明】第一步:根据对数运算法则转化不等式

要证明 $\ln \pi - \frac{\pi}{6} < \ln 3$, 即证明 $\ln \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$, 即证明 $\frac{\pi}{3} < e^{\frac{\pi}{6}}$ 7 分

解法一:第二步:构造函数,求导

设 $m(x) = e^x - 2x (x > 0)$, 则 $m'(x) = e^x - 2$,

第三步:判断函数单调性

令 $m'(x) = 0$, 解得 $x = \ln 2$,

∴ 当 $x \in (0, \ln 2)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增,

第四步:得出结论

∴ $m(x) \geq m(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$,

∴ $e^x > 2x (x > 0)$, ∴ $\frac{\pi}{3} < e^{\frac{\pi}{6}}$, 即 $\ln \pi - \frac{\pi}{6} < \ln 3$ 得证. 15 分

解法二:第二步:构造函数,求导

令 $g(x) = e^x (\sin x + \cos x) - 1$, 则 $g'(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x > 0$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立,

第三步:判断函数单调性

∴ $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 即 $f'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增. 9 分

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$, $f(x)$ 单调递增. 11 分

第四步:得出结论

∴ $f(\frac{\pi}{6}) > f(0)$, 即 $e^{\frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} > 0$,

∴ $\frac{\pi}{3} < e^{\frac{\pi}{6}}$, 即 $\ln \pi - \frac{\pi}{6} < \ln 3$ 得证. 15 分

关键点拨

第二问的解题关键:(1)要证明 $\ln \pi - \frac{\pi}{6} < \ln 3$, 即证明 $\ln \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$, 即证明 $\frac{\pi}{3} < e^{\frac{\pi}{6}}$. (2)解法一, 设 $m(x) = e^x - 2x (x > 0)$, 求 $m(x)$ 的最值; 解法二, 令 $g(x) = e^x (\sin x + \cos x) - 1$, 得到 $f'(x)$ 的单调性, 从而得到 $f(\frac{\pi}{6}) > f(0)$.

▶ $f'(0)$ 正确, 给 1 分; 切线方程正确给 2 分

▶ 第(2)问 10 分, 按照得分标准给分

▶ 等价转化, 给 2 分

▶ 构造函数给 2 分

▶ 单调性正确给 4 分, 1 个 2 分

▶ 得结论得证, 给 2 分

▶ 构造函数, 给 1 分

▶ 求导正确, 给 1 分

▶ 单调性正确给 1 分, 1 个 2 分

▶ 结论正确, 给 2 分

17. (1) 见解析 (2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【热题型】线面垂直、线线垂直及面面所成角

(1)【证明】第一步:取 BD 的中点 O , 证明 $BD \perp$ 平面 $A'OC$

取 BD 的中点 O , 连接 $A'O, CO$,

由题知 $A'B = A'D, CB = CD$,

所以 $A'O \perp BD, CO \perp BD$ 2 分

又因为 $A'O \cap CO = O, A'O \subset$ 平面 $A'OC, CO \subset$ 平面 $A'OC$,

所以 $BD \perp$ 平面 $A'OC$ 4 分

第二步:由线面垂直推出线线垂直

又 $A'C \subset$ 平面 $A'OC$, 所以 $A'C \perp BD$ 6 分

(2)【解】第一步:计算各棱长和角度, 为建系做准备

在菱形 $ABCD$ 中, 因为 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle BCD = \frac{2\pi}{3}$,

▶ 第(1)问 6 分, 分成线面垂直(4 分)线线垂直(2 分)两个部分给分

▶ 线线垂直, 给 1 分

▶ 线面垂直, 给 2 分; 未标注相交条件, 给 1 分

▶ 线线垂直, 给 2 分

▶ 第(2)问 9 分, 分成建系条件(2 分)建系书写坐标(1 分)法向量(2 分)余弦值(4 分)四个部分给分

在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC \cdot CD\cos \angle BCD=12$,解得 $BD=2\sqrt{3}$.

在 $\triangle A'OC$ 中, $A'O=CO=1, A'C=\sqrt{3}$,

所以 $\cos \angle A'OC=\frac{A'O^2+CO^2-A'C^2}{2A'O \cdot CO}=-\frac{1}{2}$,所以 $\angle A'OC=\frac{2\pi}{3}$ 8分

在平面 $A'OC$ 内,作 $OE \perp OC$,交 $A'C$ 于点 E ,由(1)可知 $BD \perp$ 平面 $A'OC$,所以 $BD \perp OE$,

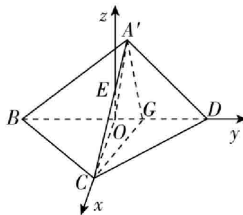
第二步:建系,写出所需点的坐标,设点 G 坐标

则以 O 为坐标原点, OC,OD,OE 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A'\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), C(1,0,0), B(0,-\sqrt{3},0), D(0,\sqrt{3},0)$,

假设在线段 BD 上存在符合要求的点 $G(0,m,0)(-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3})$.

..... 9分



第三步:分别求平面 $A'CG$ 和平面 BCD 的法向量

设平面 $A'CG$ 的法向量为 $\mathbf{n}_1=(x,y,z)$,

由 $\overrightarrow{A'C}=\left(\frac{3}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{CG}=(-1,m,0)$,

得 $\begin{cases} \overrightarrow{A'C} \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \\ \overrightarrow{CG} \cdot \mathbf{n}_1 = -x + my = 0, \end{cases}$ 令 $y=1$,解得 $x=m, z=\sqrt{3}m$,所以 $\mathbf{n}_1=(m,1,\sqrt{3}m)$.

由题可知,平面 BCD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2=(0,0,1)$ 11分

第四步:利用向量夹角公式求出 m 的值,进而求出 BG 的长度

所以 $|\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|\sqrt{3}m|}{\sqrt{m^2+1+3m^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,解得 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 13分

当 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $BG=\frac{4\sqrt{3}}{3}$;当 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $BG=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 14分

第五步:答(立体几何大题结果要按问题答一遍,规范书写)

所以当 $BG=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时,平面 $A'CG$ 与平面 BCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 15分

考点解读 立体几何的解答题难度中等,一般分为证明位置关系及求线面角、二面角等,通过几何法证明位置关系,利用空间向量法求解角度相关问题.本题属于探究型题目,在已知二面角的前提下证实点的存在,并求解线段长度.

18. (1) $E(X)>20$,具体理由见解析 (2) $\frac{94}{27}$ (3) $4(n^3-9n^2+29n-27)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

【热点考】离散型随机变量的分布列、数学期望,相互独立事件的概率

【解】(1) **第一步:**先给出结论

$E(X)>20$ 1分

第二步:利用二项分布期望公式求解

理由如下:记该同学投篮30次中投进次数为 ξ ,则 $\xi \sim B\left(30, \frac{2}{3}\right)$.

若每次投进得分都为1分,则得分的期望为 $E(\xi)=30 \times \frac{2}{3}=20$.

由比赛得分的规则知,连续投进时,得分翻倍,

故实际总得分 $E(X)$ 必大于每次得分固定为1分的数学期望 $E(\xi)$.

所以 $E(X)>20$ 4分

(2) **第一步:**列出 X 的所有可能结果

X 的可能取值为0,1,2,3,7. 5分

第二步:求出 X 的所有可能取值的概率

$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}, P(X=1)=C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9},$

▶ 余弦定理,给1分,公式正确即给分

▶ 利用余弦定理求角,给1分,公式正确即给分

▶ 建系正确且标注,给1分;其他建系方式正确也给分

▶ 求出平面法向量,给2分,其他合理答案也给分

▶ 利用向量夹角公式求出 m 的值,给2分

▶ 由 m 的值求出 BG 的长度得1分

▶ 写出结论得1分,不写扣1分

▶ 第(1)问4分,分成结论(1分)理由(3分)两个部分给分

▶ 得到 ξ 服从二项分布,给1分

▶ 利用二项分布期望公式求数学期望,给1分

▶ 得出结论得1分

▶ 第(2)问4分,分成概率及分布列(3分)期望(1分)两个部分给分

▶ 写出 X 的所有可能结果,给1分

$$P(X=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}, P(X=3)=C_2^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{27},$$

$$P(X=7)=\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}. \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

第三步:列分布列,求 X 的数学期望

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	7
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$

$$\text{所以数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{27} + 3 \times \frac{8}{27} + 7 \times \frac{8}{27} = \frac{94}{27}. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

(3)投篮 n 次得分为 3 分,有两种可能的情况:

情形一,恰好两次投进,且两次相邻;

情形二,恰好三次投进,且任意两次都不相邻.

第一步:对 n 进行讨论,计算 P_n

当 $2 \leq n \leq 4$ 时,情形二不可能发生,

$$\text{故 } P_n = C_{n-1}^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 4(n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\text{当 } n \geq 5 \text{ 时,情形一发生的概率为 } C_{n-1}^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 4(n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n, \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

情形二发生是指将 $n-3$ 次未投进的投篮排成一列,形成 $n-2$ 个空位,

$$\text{选择其中 3 个空位作为投进的投篮,故概率为 } C_{n-2}^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} = 4(n-2)(n-3)(n-4) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

$$\text{所以 } P_n = 4(n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 4(n-2)(n-3)(n-4) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 4(n^3 - 9n^2 + 29n - 27) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}. \dots\dots\dots 16 \text{分}$$

经检验,当 $n=2,3,4$ 时,符合上式.

第二步:写出 P_n 的表达式

$$\text{综上, } P_n = 4(n^3 - 9n^2 + 29n - 27) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}. \dots\dots\dots 17 \text{分}$$

19. (1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ (2) 见解析 (3) $\left[\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

【热考点】双曲线的标准方程,直线与双曲线的位置关系、点差法

(1)【解】第一步:点差法求出 a, b 的关系

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 6$,

$\because M, N$ 两点在双曲线 C 上,

$$\therefore \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ ①,} \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \text{ ②,} \end{cases} \text{ 由 ①-② 得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{即 } \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{b^2}{a^2}, \therefore \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\therefore k_{OQ} \cdot k_{MN} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ 即 } 3 \times 1 = \frac{b^2}{a^2}, \therefore b^2 = 3a^2. \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

第二步:求出 b^2 , 写出双曲线 C 的标准方程

$$\text{又 } \because a=1, \therefore b^2=3, \therefore \text{双曲线 } C \text{ 的标准方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2)【证明】第一步:联立直线 MN 和双曲线 C 的方程,写出判别式、根与系数的关系

由已知可得,直线 MN 的方程为 $y-3=1 \cdot (x-1)$, 即 $y=x+2$,

► 求出 X 的所有可能取值的概率得 1 分

► 列分布列,给 1 分,不列分布列不得分

► 求出期望,给 1 分

► 第(3)问 9 分,分成讨论(8 分)结论(1 分)两个部分给分

► 写出 $2 \leq n \leq 4$ 得 1 分,计算 P_n 得 1 分

► 写出 $n \geq 5$ 得 1 分,求出情形一的概率得 1 分

► 求出情形二的概率得 2 分

► 写出 P_n 得 2 分

► 把 P_n 写出来得 1 分

► 第(1)问 4 分,分成点差法(2 分)标准方程(2 分)两个部分给分

► 写出 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 6$ 得 1 分

► 作差得 1 分

► 写出 $\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{b^2}{a^2}$ 得 1 分

► 写出双曲线方程得 1 分

► 第(2)问 4 分,分成联立方程(2 分)三角形形状(2 分)两个部分给分

$$\text{联立} \begin{cases} y=x+2, \\ 3x^2-y^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2-4x-7=0, \Delta=16+56=72>0,$$

$$\text{则 } x_1+x_2=2, x_1x_2=-\frac{7}{2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

第二步: 计算 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN}=0$

$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} &= (x_1-1, y_1) \cdot (x_2-1, y_2) = (x_1-1)(x_2-1) + y_1y_2 \\ &= (x_1-1)(x_2-1) + (x_1+2)(x_2+2) = 2x_1x_2 + (x_1+x_2) + 5 \\ &= 2 \times \left(-\frac{7}{2}\right) + 2 + 5 = 0, \end{aligned}$$

$\therefore EM \perp EN, \therefore \triangle MEN$ 为直角三角形. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3)【解】第一步: 利用定比分点求出点 P 坐标

由题意可知, 直线 AB 的倾斜角不为 0 ,
故设直线 AB 的方程为 $x=my+n, P(x_3, y_3), A(x_4, y_4), B(x_5, y_5)$,

$$\because \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}, \therefore (x_3-x_4, y_3-y_4) = \lambda(x_5-x_4, y_5-y_4),$$

$$\therefore \begin{cases} x_3-x_4 = \lambda(x_5-x_4), \\ y_3-y_4 = \lambda(y_5-y_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{x_4 + \lambda x_5}{1 + \lambda}, \\ y_3 = \frac{y_4 + \lambda y_5}{1 + \lambda}. \end{cases} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because \text{点 } P \text{ 在双曲线 } C \text{ 上}, \therefore \left(\frac{x_4 + \lambda x_5}{1 + \lambda}\right)^2 - \frac{\left(\frac{y_4 + \lambda y_5}{1 + \lambda}\right)^2}{3} = 1,$$

$$\therefore 3(x_4 + \lambda x_5)^2 - (y_4 + \lambda y_5)^2 = 3(1 + \lambda)^2,$$

$$\therefore (3x_4^2 - y_4^2) + \lambda^2(3x_5^2 - y_5^2) + 2\lambda(3x_4x_5 - y_4y_5) = 3(1 + \lambda)^2 \quad ③. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{又} \because 3x_4^2 - y_4^2 = 0, 3x_5^2 - y_5^2 = 0,$$

$$\therefore 2\lambda(3x_4x_5 - y_4y_5) = 3(1 + \lambda)^2, \therefore 3x_4x_5 - y_4y_5 = \frac{3(1 + \lambda)^2}{2\lambda} \quad ④. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

第二步: 联立直线 AB 与双曲线方程, 得到根与系数的关系

$$\text{联立} \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0, \\ x = my + n \end{cases} \Rightarrow (3m^2 - 1)y^2 + 6mny + 3n^2 = 0,$$

$$\text{则} \begin{cases} 3m^2 - 1 \neq 0, \\ \Delta = 36m^2n^2 - 12n^2(3m^2 - 1) = 12n^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则 } y_4 + y_5 = \frac{-6mn}{3m^2 - 1} \quad ⑤, y_4y_5 = \frac{3n^2}{3m^2 - 1} \quad ⑥. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\because A, B \text{ 分别在第一象限和第四象限}, \therefore y_4y_5 < 0, \therefore 3m^2 - 1 < 0,$$

第三步: 把第二步得到的根与系数的关系代入④式

$$\text{由} \quad ④ \text{ 式得 } 3(my_4 + n)(my_5 + n) - y_4y_5 = \frac{3(1 + \lambda)^2}{2\lambda},$$

$$\therefore (3m^2 - 1)y_4y_5 + 3mn(y_4 + y_5) + 3n^2 = \frac{3(1 + \lambda)^2}{2\lambda} \quad ⑦, \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{将} \quad ⑤ \quad ⑥ \text{ 代入} \quad ⑦ \text{ 得 } (3m^2 - 1) \frac{3n^2}{3m^2 - 1} + 3mn \frac{-6mn}{3m^2 - 1} + 3n^2 = \frac{3(1 + \lambda)^2}{2\lambda},$$

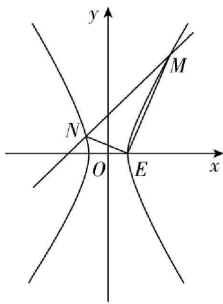
$$\therefore \frac{-6n^2}{3m^2 - 1} = \frac{3(1 + \lambda)^2}{2\lambda}, \text{ 即 } \frac{-n^2}{3m^2 - 1} = \frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

第四步: 求出 $S_{\triangle AOB}$ 的表达式

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \cdot \sin \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} |y_4| \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} |y_5|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} |y_4y_5| = \frac{\sqrt{3}}{3} \left| \frac{3n^2}{3m^2 - 1} \right| = -\sqrt{3} \cdot \frac{n^2}{3m^2 - 1}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \right). \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$



► 联立方程, 写出判别式、根与系数的关系得 2 分

► 计算 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN}=0$ 得 1 分

► 得出结论得 1 分

► 第(3)问 9 分, 分成向量运算(1 分)代点运算(2 分)联立方程(1 分)取值范围(5 分)四个部分给分

► 利用点 A, B 的坐标表示出点 P 的坐标得 1 分

► 点 P 的坐标代入双曲线方程并整理得 1 分

► 得到 $3x_4x_5 - y_4y_5 = \frac{3(1 + \lambda)^2}{2\lambda}$ 得 1 分

► 联立方程, 得到根与系数的关系得 1 分

► 把第二步得到的根与系数的关系代入④式得 1 分

► 将⑤⑥代入⑦得 1 分

► 求出 $S_{\triangle AOB}$ 的表达式得 2 分

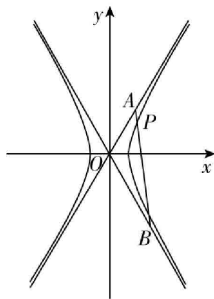
第五步:利用对勾函数的性质求出 $S_{\triangle AOB}$ 的取值范围

$$\text{令 } h(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right],$$

由对勾函数的性质可得 $h(\lambda)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上单调递减, 在 $(1, 2]$ 上单调递增,

$\therefore h(\lambda) \in \left[2, \frac{10}{3}\right], \therefore S_{\triangle AOB} \in \left[\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$. 故 $\triangle AOB$ 面积的取值范围为 $\left[\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ 17 分

► 利用对勾函数的性质求出 $S_{\triangle AOB}$ 的取值范围得 1 分



2025 年全国高考名校名师联席命制 数学信息卷(七)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	C	B	B	D	B	C	B	D	BD	ABD	ACD	$-\sqrt{6}$	-1	$\sqrt{\frac{5}{6}}$

1. C 【热考点】集合的并集运算

【深度解析】由题可得, 集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\} = [-1, 3], B = \{y | y = \pi^x, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y > 0\} = (0, +\infty)$ (易错: 集合 B 中 x 的取值范围为全体实数, 需与集合 A 中元素作区分), 所以 $A \cup B = [-1, +\infty)$. 故选 C.

2. B 【热考点】复数的除法运算、共轭复数的概念

【深度解析】 $z = \frac{-2-5i}{-1+i} = \frac{2+5i}{1-i} = \frac{(2+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$, 所以 $\bar{z} = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$, 故 \bar{z} 的虚部为 $-\frac{7}{2}$. 故选 B.

3. B 【热考点】利用余弦定理解三角形

【深度解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = b^2 + c^2 - bc = 49$, 联立 $\begin{cases} 5b = 8c, \\ b^2 + c^2 - bc = 49, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = 8, \\ c = 5 \end{cases}$ (b, c 均大于 0), 所以 $a+b+c = 20$. 故选 B.

4. D 【热考点】双曲线的几何性质

【深度解析】依题意, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 因为一条渐近线与直线 $4x+y+7=0$ 垂直, 直线 $4x+y+7=0$ 的斜率为 -4 (提示: 两直线斜率分别为 k_1, k_2 , 若两直线互相垂直, 则 $k_1 \cdot k_2 = -1$), 所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$, 则双曲线 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$. 故选 D.

► 关键点拨 求解双曲线的渐近线方程时, 可令标准方程右侧的值为 0, 直接解方程即可求出渐近线的方程.

5. B 【热题型】二项展开式中特定项的系数

【深度解析】因为 $(x+y-1)^8 = [(x-1)+y]^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r (x-1)^{8-r} y^r$ ($r=0, 1, \dots, 8$), 当 $r=4$ 时才能出现 y^4 , 此时 $T_5 = C_8^4 (x-1)^4 y^4$, $(x-1)^4$ 展开式的通项为 $T_5 = C_4^k x^{4-k} (-1)^k$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$), 当 $k=3$ 时出现 x , 所以展开式中含

xy^4 项的系数为 $C_8^4 C_4^3 (-1)^3 = -280$. 故选 B.

► 一题多解 $(x+y-1)^8$ 可以看成 8 个因式 $(x+y-1)$ 相乘, 其中 4 个因式出 y , 剩下的 4 个因式中有一个因式出 x , 其余因式出 -1 , 所以展开式中含 xy^4 项的系数为 $C_8^4 C_4^1 \cdot (-1)^3 = -280$. 故选 B.

6. C 【热考点】直线和圆的位置关系

【深度解析】圆 $C: x^2 + (y+2)^2 = 4$, 圆心为 $(0, -2)$, 半径 $r=2$, 设斜率为 -1 的直线 l 的方程为 $x+y+m=0$, 则圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|-2+m|}{\sqrt{2}}$, 由题意得 $0 < d < 2$, 则 $0 < |-2+m| < 2\sqrt{2}$. 弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - \frac{(m-2)^2}{2}}$, $\triangle CAB$ 的面积为 $S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |AB| = \frac{|-2+m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - \frac{(m-2)^2}{2}} = \sqrt{2(m-2)^2 - \frac{(m-2)^4}{4}}$, 令 $(m-2)^2 = t, 0 < t < 8$, 则 $S_{\triangle CAB} = \sqrt{2t - \frac{t^2}{4}} = \sqrt{-\frac{1}{4}(t-4)^2 + 4}$, 当 $t=4$, 即 $m=0$ 或 $m=4$ 时, $S_{\triangle CAB}$ 取得最大值 2, 所以当 $\triangle CAB$ 面积取得最大值时, 直线 l 的纵截距为 0 或 -4 (易错: 混淆直线的截距的定义). 故选 C.

► 一题多解 圆 $C: x^2 + (y+2)^2 = 4$, 圆心为 $(0, -2)$, 半径为 $r=2$, 设圆心 C 到直线 l 的距离为 d ($0 < d < 2$), $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - d^2}$, 则 $S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \sqrt{d^2(4 - d^2)} \leq \frac{d^2 + (4 - d^2)}{2} = 2$, 当且仅当 $d^2 = 4 - d^2$, 即 $d = \sqrt{2}$ 时等号成立. 设直线 l 的方程为 $x+y+m=0$, 此时圆心到直线的距离 $d = \frac{|-2+m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 解得 $m=0$ 或 $m=4$, 所以直线 l 的纵截距为 0 或 -4 . 故选 C.